

LIBRIS

We know
books

Andrei Vernescu

ANALIZA MATEMATICĂ

**CULEGERE
DE PROBLEME**

CLASA A XII-A

E I K O N

București, 2025

CUPRINS

CAPITOLUL VII – Primitive

Scurtă schiță teoretică	9
1. Calculul câtorva primitive la care se aplică doar formulele fundamentale și proprietatea de liniaritate	13
2. Calculul câtorva primitive pe baza integrării prin părți.	16
3. Stabilirea unor relații de recurență pentru câteva integrale nedefinite, pe baza integrării prin părți	20
4. Calculul câtorva primitive pe baza unor schimbări de variabilă simple	22
5. Calculul câtorva primitive prin combinarea metodei de integrare prin părți cu metoda de integrare prin schimbare de variabilă	24
6. Calculul unor primitive pentru care se poate prevedea forma	25
7. Integrarea funcțiilor raționale	26
a) Descompunerea în fracții simple	26
b) Calculul coeficienților	28
c) Integrarea fracțiilor simple	28
d) Integrarea completă a funcțiilor raționale	30
8. Primitive reductibile la primitive de funcții raționale. Substituțiile clasice	31
a) Primitive de forma $I = \int R(a^x)dx$ ($0 < a \neq 1$), unde R este o funcție rațională de o variabilă	31
b) Primitive de forma $I = \int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx$, unde R este o funcție rațională de două variabile	31
c) Primitive de funcții trigonometrice	31
c ₁) Primitive de forma $I = \int \sin^p x \cos^q x dx$, cu $p, q \in \mathbb{N}$	31
c ₂) Primitive de forma $I = \int R(\sin x, \cos x) dx$	33
c ₃) Primitive de forma $I = \int R(\sin x, \cos x) dx$ în care funcția rațională R are anumite proprietăți de paritate sau imparitate	33
d) Primitive de forma $I = \int R\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right) dx$	34
d ₁) Substituțiile lui Euler	34

d₂) Reducerea calculului primitivelor de forma

$$I = \int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx \text{ la cel al calculului anumitor}$$

primitive de funcții trigonometrice.....	35
e) Alte schimbări de variabilă (nestandard)	37
9. Primitive la care este necesară racordarea constantelor	38
10. Exemple de funcții pentru care primitivele nu sunt exprimabile prin funcții elementare	38
11. Exemple de funcții care nu admit primitive	40

CAPITOLUL VIII. – Funcții integrabile

A – Funcții integrabile Riemann

Scurtă schiță teoretică.....

.....	42
1. Un criteriu de integrabilitate. Exemple de funcții integrabile.....	47
2. Calculul integralelor ca limite ale șirurilor de sume Riemann.....	47
3. Exemple de funcții neintegrabile. Funcții de tip Dirichlet	47
4. Formula lui Leibniz-Newton. Exemple de aplicare	48
5. Exerciții teoretice legate de integrabilitatea Riemann	48
6. Obținerea unor identități cu ajutorul integralelor.....	49
7. Obținerea unor inegalități cu ajutorul integralelor	49

B – Teoria lui Darboux a integralei

Scurtă schiță teoretică.....

.....	50
8. Calculul sumelor Darboux.....	52
9. Aplicații ale criteriului de integrabilitate al lui Darboux	52
10. Calculul limitelor unor sume cu ajutorul integralelor	53

C – Integrarea funcțiilor continue

Scurtă schiță teoretică.....

.....	54
11. Studiul convergenței unor șiruri definite cu ajutorul integralelor ...	58
a) Studiul pe baza unor majorări sau minorări directe.....	58
b) Studiul pe baza mărginirii și monotoniei	59
c) Studiul pe baza stabilirii unor relații de recurență	60
d) Alte exerciții; limitele unor șiruri de integrale.....	61
12. Integrarea prin părți, câteva exemple	62
13. Stabilirea câtorva formule de recurență remarcabile pentru anumite integrale definite. Formulele lui Wallis și Stirling.....	64
14. Integrarea prin schimbare de variabilă.....	66
a) Exerciții introductive și câteva integrale trigonometrice speciale.....	66
b) Ortonormalitatea sistemului trigonometric fundamental ...	67
c) Calculul unor integrale drept coeficienți în dezvoltarea Fourier finită sau alte dezvoltări ortogonale.....	69
15. Stabilirea egalității unor integrale fără a le calcula efectiv.....	69

16. Câteva exemple de calcul al unor integrale pentru care nu se poate obține primitiva pe cale elementară. Identitatea lui Young și aplicații.....	71
17. Majorarea și minorarea unor integrale.....	74
a) Majorarea și minorarea pe baza utilizării unor majorări și minorări numerice ale funcției de integrat.....	74
b) Majorarea și minorarea pe baza majorării, respectiv minorării, funcției de sub integrală cu altă funcție.....	75
c) Majorarea și minorarea pe baza aproximării ariei subgraficului cu aria unor trapeze.....	75
18. Formularea integrală a unor inegalități clasice: Young, Hölder, Cauchy-Buniakovski-Schwarz, Minkovski, Cebîșev.....	76
19. Revenire asupra șirurilor definite cu ajutorul integralelor; aplicații la obținerea unor rezultate referitoare la serii.....	79
a) Integrarea unor identități.....	79
b) Calculul integralelor pe baza unei relații de recurență, urmată de explicitare.....	81
20. Câteva formule integrale în care se schimbă intervalul de integrare.....	82
a) Integrarea unor funcții pare, impare sau cu unele proprietăți de simetrie pe anumite intervale speciale.....	82
b) Integrarea funcțiilor periodice pe intervale oarecare sau pe intervale de lungime egală cu perioada ori un multiplu al perioadei.....	84
c) Câteva formule de „condensare“.....	85
d) Scoaterea în afara integralei a unor constante ce nu apar sub formă multiplicativă.....	86
21. Utilizarea teoremei de medie în rezolvarea unor probleme legate de integrale.....	86
22. Aplicații ale teoremei de existență a primitivei unei funcții continue.....	87
a) Câteva aplicații directe.....	87
b) Monotonia funcției de medie integrală $\Phi(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t)dt$	88
c) Derivarea integralelor cu limite de derivare variabile.....	89
d) Verificarea, respectiv rezolvarea prin derivare a câtorva ecuații integrale simple.....	90
23. Funcții definite cu ajutorul unor integrale cu capete de integrare variabile. Un exemplu remarcabil: definirea integrală a logaritmului.....	91
24. Câteva proprietăți punctuale legate de integrale.....	92

CAPITOLUL IX – Aplicații geometrice ale integralelor

Scurtă schiță teoretică.....	92
------------------------------	----

1. Arii.....	96
2. Volume de rotație.....	97
3. Lungimea graficului unei funcții.....	98
4. Aria suprafețelor de rotație.....	98

CAPITOLUL X – 70 de probleme recapitulative și/sau cu grad sporit de dificultate	98
Indicații și soluții	109
Bibliografie	193
Comentarii și recomandări bibliografice	194

PRIMITIVE

Scurtă schiță teoretică

Fie J un interval nedegenerat¹⁾ al axei reale și o funcție $f : J \rightarrow \mathbb{R}$.

VII. 1. Definiție. Funcția $f : J \rightarrow \mathbb{R}$ admite primitive pe intervalul J dacă există o funcție $F : J \rightarrow \mathbb{R}$, astfel încât

1) F este derivabilă pe J ;

2) $F' = f$ (adică $F'(x) = f(x)$, pentru orice $x \in J$).

Funcția F se numește primitivă a funcției f pe intervalul J .

VII. 2. Observație. Dacă F este o primitivă a funcției f , iar $C \in \mathbb{R}$ (C este o constantă), atunci funcția $G : J \rightarrow \mathbb{R}$, definită prin egalitatea

$$G(x) = F(x) + C, \forall x \in J$$

este, de asemenea, o primitivă a funcției f . (Dacă la o primitivă a unei funcții se adaugă o constantă, se obține, de asemenea, o primitivă).

VII. 3. Propoziție (Reciproca observației). Dacă F și G sunt două primitive ale funcției $f : J \rightarrow \mathbb{R}$, atunci există o constantă $C \in \mathbb{R}$, astfel încât

$$G(x) = F(x) + C, \forall x \in J.$$

(Oricare două primitive ale unei funcții pe un interval diferă printr-o constantă aditivă).

Din observația și definiția precedentă rezultă că, fiind dată o primitivă F_0 a funcției $f : J \rightarrow \mathbb{R}$, o altă funcție $G : J \rightarrow \mathbb{R}$ este o primitivă a funcției f dacă și numai dacă este de forma $G(x) = F_0(x) + C$.

VII. 4. Definiție. Dacă o funcție $f : J \rightarrow \mathbb{R}$ admite primitive, atunci mulțimea tuturor primitivelor funcției f se numește integrala nedefinită a funcției și se notează

$$\int f(x)dx.^{2)}$$

VII. 5. Observație. Orice funcție care admite primitive are proprietatea lui Darboux, a valorilor intermediare.

În consecință, o funcție care **nu** are proprietatea lui Darboux **nu** admite primitive.

VII. 6. Teoremă. Orice funcție continuă $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ admite primitive.³⁾

¹⁾Un interval este nedegenerat dacă este nevid și nu se reduce la un singur punct. Spre exemplu, dacă $a < b$, atunci oricare dintre intervalele $[a, b]$, $[a, b)$, $(a, b]$ și (a, b) este nedegenerat.

²⁾În anumite expuneri, simbolul $\int f(x)dx$ desemnează o primitivă oarecare a funcției f . În acest caz, egalitățile din propozițiile VII.9 și VII.10 devin egalități de funcții și nu egalități între mulțimi de funcții.

³⁾Teorema se demonstrează în cadrul teoriei integralei Riemann.

VII. 7. Definiție. Dacă $A, B \subset \mathbb{R}$ și $\lambda \in \mathbb{R}$, se definește și se notează

$$A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\},$$

$$\lambda A = \{\lambda a \mid a \in A\}.$$

În cazul că $\mathcal{F}, \mathcal{G} \subset \mathcal{F}(J) = \{f : J \rightarrow \mathbb{R}\}$, adică \mathcal{F} și \mathcal{G} sunt părți ale mulțimii funcțiilor definite pe J , cu valori reale, se definește și se notează

$$\mathcal{F} + \mathcal{G} = \{f + g \mid f \in \mathcal{F}, g \in \mathcal{G}\},$$

$$\lambda \mathcal{F} = \{\lambda f \mid f \in \mathcal{F}\},$$

$$\mathcal{C} = \{f : J \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ funcție constantă}\}.$$

VII. 8. Observații. Cu notațiile precedente, avem

a) $\lambda \mathcal{C} = \mathcal{C}$, dacă $\lambda \neq 0$ (ceea ce înseamnă că produsul dintre orice funcție constantă și un număr $\lambda \neq 0$ este o funcție constantă și reciproc, orice funcție constantă este egală cu produsul dintre un număr $\lambda \neq 0$ și o altă funcție constantă);

b) $\mathcal{C} + \mathcal{C} = \mathcal{C}$ (ceea ce înseamnă că suma a două funcții constante este, de asemenea, o funcție constantă și reciproc, orice funcție constantă este egală cu suma a două funcții constante);

c) Dacă $f : J \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție care admite primitive și dacă F_0 este o primitivă a sa, atunci

$$\int f(x)dx = \{F_0\} + \mathcal{C}$$

sau, cu scrierea $\{F_0\} = F_0$, are loc egalitatea de mulțimi de funcții

$$\int f(x)dx = F_0 + \mathcal{C}.^{1)}$$

VII. 9. Propoziție. Fie $f : J \rightarrow \mathbb{R}$, o funcție care admite primitive. Atunci are loc egalitatea

$$\int f(x)dx = \int f(x)dx + \mathcal{C}.^{2)}$$

VII.10. Propoziție. Fie $f, g : J \rightarrow \mathbb{R}$ două funcții care admit primitive și $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$. Atunci funcțiile $f + g$ și λf admit de asemenea primitive și au loc egalitățile

$$\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx;$$

$$\int \lambda f(x)dx = \lambda \int f(x)dx \quad (\lambda \neq 0).$$

¹⁾Punctul c) reprezintă scrierea sub formă de egalitate de mulțimi a observației VII.2 și a concluziei din propoziția VII. 3.

²⁾Reamintim că relația este o egalitate de mulțimi; ea poate fi asemănată cu egalitatea $\mathbb{R} = \mathbb{R} + \{c\}$, unde c este un număr real fixat.

VII. 11. Tabelul integralelor nedefinite uzuale ¹⁾

Funcția	Mulțimea primitivelor
1. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 0$	$\int 0 dx = C$
2. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 1$	$\int dx = x + C$
3. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^n, n \in \mathbb{N}$	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
4. $f : J \rightarrow \mathbb{R}, J \subset (0, \infty), f(x) = x^\alpha,$ $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq -1$	$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$
4' (cazuri particulare la 4, frecvent întâlnite)	
a) $\alpha = -2, f(x) = \frac{1}{x^2}$	$\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C$
b) $\alpha = -\frac{1}{2}, f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$
5. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = e^x$	$\int e^x dx = e^x + C$
5'. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = a^x, 0 < a \neq 1$	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
6. $f : J \rightarrow \mathbb{R}, J \subset (-\infty, 0) \cup (0, \infty);$ $f(x) = \frac{1}{x}$	$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$
7. $f : J \rightarrow \mathbb{R}, J \in \mathbb{R} \setminus \{-a, a\},$ $f(x) = \frac{1}{x^2 - a^2}$	$\int \frac{1}{x^2 - a^2} dx =$ $= \frac{1}{2a} \ln \left \frac{x-a}{x+a} \right + C$
8. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x^2 + a^2}$	$\int \frac{1}{x^2 + a^2} dx =$ $= \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$
9. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sin x$	$\int \sin x dx = -\cos x + C$
10. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \cos x$	$\int \cos x dx = \sin x + C$

¹⁾În tot acest tabel, J reprezintă un interval, iar a este un număr real strict pozitiv.

$$11. \quad \begin{aligned} & f : J \rightarrow \mathbb{R}, \\ & J \subset \mathbb{R} \setminus \left\{ (2k+1)\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \\ & f(x) = \frac{1}{\cos^2 x} \end{aligned}$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C$$

$$12. \quad \begin{aligned} & f : J \rightarrow \mathbb{R}, \\ & J \subset \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \\ & f(x) = \frac{1}{\sin^2 x} \end{aligned}$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C$$

$$13. \quad \begin{aligned} & f : J \rightarrow \mathbb{R}, \\ & J \subset \mathbb{R} \setminus \left\{ (2k+1)\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \\ & f(x) = \operatorname{tg} x \end{aligned}$$

$$\int \operatorname{tg} x dx = -\ln |\cos x| + C$$

$$14. \quad \begin{aligned} & f : J \rightarrow \mathbb{R}, \\ & J \subset \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \\ & f(x) = \operatorname{ctg} x \end{aligned}$$

$$\int \operatorname{ctg} x dx = \ln |\sin x| + C$$

$$15. \quad f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx = \ln \left(x + \sqrt{x^2 + a^2} \right) + C$$

$$16. \quad \begin{aligned} & f : J \rightarrow \mathbb{R}, \\ & J \subset (-\infty, -a) \cup (a, \infty), \\ & f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}} \end{aligned}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}} dx = \ln \left| x + \sqrt{x^2 - a^2} \right| + C$$

$$17. \quad \begin{aligned} & f : J \rightarrow \mathbb{R}, J \subset (-a, a), \\ & f(x) = \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} \end{aligned}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a} + C$$

VII.12. Teoremă (formula de integrare prin părți). Fie $f, g : J \rightarrow \mathbb{R}$ două funcții derivabile, cu derivatele continue. Atunci funcțiile $f g'$ și $f' g$ admit primitive și

$$\int f(x)g'(x)dx = fg - \int f'(x)g(x)dx.^1)$$

VII.13. Teoremă (prima formulă de schimbare de variabilă). Fie I și J două intervale din \mathbb{R} și fie două funcții

$$I \xrightarrow{\varphi} J \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$

¹⁾În calculele concrete se pune în evidență variabila x , așa încât formula se folosește sub forma $\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$.

cu proprietățile:

- a) φ este derivabilă pe I ;
- b) f admite primitive (fie F o primitivă a sa).

Atunci funcția $(f \circ \varphi)\varphi'$ admite primitive, iar funcția $F \circ \varphi$ este o primitivă a sa, adică:

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = F \circ \varphi + C.^{1)}$$

VII.14. Teoremă (a doua formulă de schimbare de variabilă).

Fie I și J două intervale din \mathbb{R} și fie două funcții

$$I \xrightarrow{\varphi} J \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$

cu proprietățile:

- a) φ este bijectivă, derivabilă, cu derivata nenulă pe I ;
- b) funcția $h = (f \circ \varphi)\varphi'$ admite primitive (fie H o primitivă a sa).

Atunci

- 1) funcția f admite primitive,
- 2) Funcția $H \circ \varphi^{-1}$ este o primitivă a funcției f , adică:

$$\int f(x)dx = H \circ \varphi^{-1} + C.^{2)}$$

* * *

Elementele de teorie referitoare la integrarea funcțiilor raționale, precum și schimbările de variabilă clasice, care reduc calculul unor primitive la cel al primitivelor unor funcții raționale, nu sunt prezentate aici, ci la secțiunile respective.

1. CALCULUL CĂTORVA PRIMITIVE LA CARE SE APLICĂ DOAR FORMULELE FUNDAMENTALE ȘI PROPRIETATEA DE LINIARITATE

1. Să se verifice formulele din tabloul primitivelor prin derivare.

2. Aplicând formula $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$ ($\alpha \neq -1$), să se deducă egalitățile:

a) $\int \frac{1}{x^n} dx = -\frac{1}{n-1} \cdot \frac{1}{x^{n-1}} + C, x \in J \subset (-\infty, 0) \cup (0, \infty)^{3)}, n \in \mathbb{N}, n > 1;$

¹⁾Din nou, în calculele concrete, se pune în evidență variabila x , adică formula se utilizează sub forma $\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = F(\varphi(x)) + C$.

²⁾Analog $\int f(x)dx = H(\varphi^{-1}(x)) + C$.

³⁾În tot ceea ce urmează, J desemnează un interval nedegenerat al axei reale.

b) $\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} + C, x \in (0, \infty);$

c) $\int \sqrt[n]{x} dx = \frac{n}{n+1} \sqrt[n]{x^{n+1}} + C, x \in [0, \infty).$

3. Aplicând egalitățile din problema 2, să se calculeze:¹⁾

a) $\int \frac{1}{x^2} dx;$ b) $\int \frac{1}{x^3} dx;$ c) $\int \frac{1}{x^8} dx;$

d) $\int \sqrt[3]{x} dx;$ e) $\int \sqrt[4]{x} dx;$ f) $\int \sqrt[7]{x} dx.$

4. a) Scriind că $e^{-x} = \left(\frac{1}{e}\right)^x$ și observând că $\ln\left(\frac{1}{e}\right) = -1$, să se deducă egalitatea

$$\int e^{-x} dx = -e^{-x} + C;$$

b) Se notează $\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ și $\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$. Să se deducă egalitățile:

$$\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C; \quad \int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C.^{2)}$$

5. Să se calculeze:

a) $\int (x^2 + 6x + 7) dx, x \in \mathbb{R};$

b) $\int \left(x^{\frac{2}{5}} + x^{-\frac{7}{3}} + x^{\frac{1}{2}} + x^{-1}\right) dx, x \in (0, \infty);$

c) $\int (1 + x + x^2 + x^3) dx, x \in \mathbb{R};$

d) $\int \frac{1}{x} dx, x \in (0, \infty);$ e) $\int \left(\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) dx, x \in (-1, 1);$

f) $\int \left(3 \sin x + 4 \cos x + \frac{1}{\cos^2 x}\right) dx, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right);$

g) $\int \frac{1 - \cos^3 x}{\cos^2 x} dx, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right);$ h) $\int 2^x 3^x 5^x dx, x \in \mathbb{R}.$

6. Să se decidă dacă sunt corecte egalitățile următoare, dând și justificarea:

a) $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arccot} x + K, x \in \mathbb{R};$

¹⁾În enunțul unei probleme de acest fel, cel mai riguros mod de prezentare este acela ca să se precizeze dinainte intervalul în care este considerată variabila x , interval care poate fi o submulțime a domeniului maxim de definiție al funcției care se integrează. Dacă acest lucru nu este făcut, el revine în atribuțiile rezolvitorului.

²⁾Funcțiile reale de variabilă reală $x, x \mapsto \operatorname{ch} x$ și $x \mapsto \operatorname{sh} x$ se numesc **cosinus hiperbolic**, respectiv **sinus hiperbolic**.

b) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C = -\arccos x + K, x \in (-1, 1).$

7. Să se determine:

a) $\int \frac{dx}{4+x^2}, x \in \mathbb{R}; \quad \int \frac{dx}{5+x^2}, x \in \mathbb{R};$

b) $\int \frac{dx}{1+4x^2}, x \in \mathbb{R}; \quad \int \frac{dx}{1+5x^2}, x \in \mathbb{R};$

c) $\int \frac{dx}{9+4x^2}, x \in \mathbb{R}; \quad \int \frac{dx}{7+3x^2}, x \in \mathbb{R};$

d) $\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}, x \in (-2, 2); \quad \int \frac{dx}{\sqrt{7-x^2}}, x \in (-\sqrt{7}, \sqrt{7});$

e) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}}, x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right); \quad \int \frac{dx}{\sqrt{1-5x^2}}, x \in \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right);$

f) $\int \frac{dx}{\sqrt{9-4x^2}}, x \in \left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right); \quad \int \frac{dx}{\sqrt{7-5x^2}}, x \in \left(-\sqrt{\frac{7}{5}}, \sqrt{\frac{7}{5}}\right).$

8. Să se determine următoarele primitive (în care J este un interval):

a) $\int \frac{dx}{x^2-4}, x \in J \subset (-\infty, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, \infty);$

$\int \frac{dx}{x^2-5}, x \in J \subset (-\infty, -\sqrt{5}) \cup (-\sqrt{5}, \sqrt{5}) \cup (\sqrt{5}, \infty);$

a') $\int \frac{dx}{4-x^2}, x \in (-2, 2); \quad \int \frac{dx}{5-x^2}, x \in (-\sqrt{5}, \sqrt{5});$

b) $\int \frac{dx}{4x^2-1}, x \in J \subset \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, \infty\right);$

$\int \frac{dx}{5x^2-1}, x \in J \subset \left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \infty\right);$

b') $\int \frac{dx}{1-4x^2}, x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right); \quad \int \frac{dx}{1-5x^2}, x \in \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right);$

c) $\int \frac{dx}{4x^2-9}, x \in J \subset \left(-\infty, -\frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}, \infty\right);$

$\int \frac{dx}{5x^2-7}, x \in J \subset \left(-\infty, -\sqrt{\frac{7}{5}}\right) \cup \left(\sqrt{\frac{7}{5}}, \infty\right);$

c') $\int \frac{dx}{9-4x^2}, x \in \left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right); \quad \int \frac{dx}{7-5x^2}, x \in \left(-\sqrt{\frac{7}{5}}, \sqrt{\frac{7}{5}}\right);$

d) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4}}, x \in (-\infty, -2) \cup (2, \infty);$

$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-5}}, x \in J \subset (-\infty, -\sqrt{5}) \cup (\sqrt{5}, \infty);$

- e) $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2 - 1}}$, $x \in J \subset \left(\frac{1}{2}, \infty \right) \cup \left(-\infty, -\frac{1}{2} \right)$;
 $\int \frac{dx}{\sqrt{5x^2 - 1}}$, $x \in J \subset \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \infty \right) \cup \left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{5}} \right)$;
 f) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 4}}$, $x \in \mathbb{R}$; $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 5}}$, $x \in \mathbb{R}$;
 g) $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2 + 1}}$, $x \in \mathbb{R}$; $\int \frac{dx}{\sqrt{5x^2 + 1}}$, $x \in \mathbb{R}$.

2. CALCULUL CĂTORVA PRIMITIVE PE BAZA INTEGRĂRII PRIN PĂRȚI

9. Să se calculeze următoarele primitive, efectuând alegerea indicată în dreptul fiecăreia:

- a) $I = \int x e^x dx$, $x \in \mathbb{R}$... $f(x) = x$ $g'(x) = e^x$;
 b) $I = \int x 2^x dx$, $x \in \mathbb{R}$... $f(x) = x$ $g'(x) = 2^x$;
 c) $I = \int x \ln x dx$, $x \in (0, \infty)$... $f(x) = \ln x$ $g'(x) = x$;
 d) $I = \int x^n \ln x dx$, $x \in (0, \infty)$... $f(x) = \ln x$ $g'(x) = x^n$;
 e) $I = \int x \cos x dx$, $x \in \mathbb{R}$... $f(x) = x$ $g'(x) = \cos x$;
 f) $I = \int x \sin x dx$, $x \in \mathbb{R}$... $f(x) = x$ $g'(x) = \sin x$;
 g) $I = \int \frac{x \ln(x + \sqrt{1 + x^2})}{\sqrt{1 + x^2}} dx$, $x \in \mathbb{R}$... $f(x) = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$
 $g'(x) = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$, $x \in \mathbb{R}$;
 h) $I = \int x \cosh x dx$, $x \in \mathbb{R}$... $f(x) = x$ $g'(x) = \cosh x$;
 i) $I = \int x \sinh x dx$, $x \in \mathbb{R}$... $f(x) = x$ $g'(x) = \sinh x$;
 j) $I = \int \frac{x \arcsin x}{(1 - x^2) \sqrt{1 - x^2}} dx$, ... $f(x) = \arcsin x$ $g'(x) = \frac{x}{(1 - x^2) \sqrt{1 - x^2}}$.

Observații. 1) La calculul primitivelor pe baza integrării prin părți, se recomandă așezarea funcțiilor în următoarea ordine (exemplificarea este dată pentru punctul a)):

- 1° $f(x) = x$; 3° $f'(x) = 1$;
 2° $g'(x) = e^x$; 4° $g(x) = e^x$.

(Se face alegerea formată din 1° și 2°, în așa fel încât produsul $f(x)g'(x)$ să coincidă exact cu funcția de sub integrală, iar apoi se calculează 3° și 4°.) Aplicând formula de integrare prin părți, rezultă

$$I = \int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C.$$

Mai există o modalitate „rapidă“ de integrare prin părți, care constă în a pune în evidență **în interiorul integralei** una dintre funcțiile care alcătuiesc produsul, ca derivată. Astfel, tot pentru punctul a), se obține:

$$I = \int xe^x dx = \int x (e^x)' dx = xe^x - \int x' e^x dx = xe^x - e^x + C.$$

2) Metoda de integrare prin părți servește în general la calculul primitivelor dintr-un produs al unor funcții „diferite“, „îndepartate între ele“.

3) Dacă o primă alegere a funcțiilor f și g nu duce la calcularea unei primitive mai simple, nu trebuie considerat numaidecât că primitiva nu poate fi calculată pe baza metodei de integrare prin părți; o eventuală altă alegere a funcțiilor poate remedia situația.

4) În general, la calculul unei primitive de forma $F(x) = \int P(x)\varphi(x)dx$, unde P este o funcție polinomială cu coeficienți reali, iar φ este o funcție transcendentă elementară, se recomandă următoarea alegere:

- în rolul funcției f , se alege funcția transcendentă φ , dacă aceasta este o funcție transcendentă inversă;
- în rolul funcției g' , se alege funcția transcendentă φ , dacă aceasta este o funcție transcendentă directă.

Menționăm următoarele funcții transcendente elementare directe, împreună cu inversele corespunzătoare:

Directe	Inverse
e^x	$\ln x$
$a^x, 0 < a \neq 1$	$\log_a x$
$\sin x$	$\arcsin x$
$\cos x$	$\arccos x$
$\operatorname{tg} x$	$\operatorname{arctg} x$
$\operatorname{ctg} x$	$\operatorname{arcctg} x$
La acestea se mai pot adăuga:	
$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{argsh} x$
$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{argch} x^{1)}$
$\operatorname{th} x$	$\operatorname{argth} x^{2)}$

¹⁾ Funcția $\operatorname{ch} : \mathbb{R} \rightarrow [1, \infty)$ nu este bijectivă. Se pot inversa restricțiile sale maximale, la intervalele $(-\infty, 0)$, respectiv $(0, \infty)$. Din egalitatea $y = \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ se obține $x = \ln(y + \sqrt{y^2 - 1})$ în cazul $x > 0$, respectiv $x = \ln(y - \sqrt{y^2 - 1})$ în cazul $x < 0$. Printr-un abuz de notație devenit tradițional, se notează ambele funcții inverse, corespunzătoare celor două restricții, cu $\operatorname{argch} y$.

²⁾ Funcțiile sh și th sunt bijective și se obține $\operatorname{argsh} y = \ln(y + \sqrt{y^2 + 1})$, respectiv $\operatorname{argth} y = \frac{1}{2} \ln \frac{1-y}{1+y}$.