Andrei Vernescu

ANALIZA MATEMATICĂ

CULEGERE DE PROBLEME

CLASA A XII-A

EIKON
București, 2025

CUPRINS

CAPITOLUL VII – Primitive

CAPITOLUL VII

PRIMITIVE

Scurtă schiţă teoretică

Fie J un interval nedegenerat[1)] al axei reale şi o funcţie $f : J \to \mathbb{R}$.

VII. 1. Definiţie. Funcţia $f : J \to \mathbb{R}$ admite primitive pe intervalul J dacă există o funcţie $F : J \to \mathbb{R}$, astfel încât

1) F este derivabilă pe J;

2) $F' = f$ (adică $F'(x) = f(x)$, pentru orice $x \in J$).

Funcţia F se numeşte primitivă a funcţiei f pe intervalul J.

VII. 2. Observaţie. Dacă F este o primitivă a funcţiei f, iar $C \in \mathbb{R}$ (C este o constantă), atunci funcţia $G : J \to \mathbb{R}$, definită prin egalitatea

$$G(x) = F(x) + C, \ \forall x \in J$$

este, de asemenea, o primitivă a funcţiei f. (Dacă la o primitivă a unei funcţii se adaugă o constantă, se obţine, de asemenea, o primitivă).

VII. 3. Propoziţie (Reciproca observaţiei). Dacă F şi G sunt două primitive ale functiei $f : J \to \mathbb{R}$, atunci există o constantă $C \in \mathbb{R}$, astfel încât

$$G(x) = F(x) + C, \ \forall x \in J.$$

(Oricare două primitive ale unei funcţii pe un interval diferă printr-o constantă aditivă).

Din observaţia şi definiţia precedentă rezultă că, fiind dată o primitivă F_0 a funcţiei $f : J \to \mathbb{R}$, o altă funcţie $G : J \to \mathbb{R}$ este o primitivă a funcţiei f dacă şi numai dacă este de forma $G(x) = F_0(x) + C$.

VII. 4. Definiţie. Dacă o funcţie $f : J \to \mathbb{R}$ admite primitive, atunci mulţimea tuturor primitivelor funcţiei f se numeşte integrala nedefinită a funcţiei şi se notează

$$\int f(x)\mathrm{d}x.$$[2)]

VII. 5. Observaţie. Orice funcţie care admite primitive are proprietatea lui Darboux, a valorilor intermediare.

În consecinţă, o funcţie care **nu** are proprietatea lui Darboux **nu** admite primitive.

VII. 6. Teoremă. Orice funcţie continuă $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ admite primitive.[3)]

[1)] Un interval este nedegenerat dacă este nevid si nu se reduce la un singur punct. Spre exemplu, dacă $a < b$, atunci oricare dintre intervalele $[a, b]$, $[a, b)$, $(a, b]$ şi (a, b) este nedegenerat.

[2)] În anumite expuneri, simbolul $\int f(x)\mathrm{d}x$ desemnează *o primitivă oarecare* a funcţiei f. În acest caz, egalităţile din propoziţiile VII.9 şi VII.10 devin egalităţi de funcţii şi nu egalităţi între mulţimi de funcţii.

[3)] Teorema se demonstrează în cadrul teoriei integralei Riemann.

VII. 7. Definiţie. Dacă $A, B \subset \mathbb{R}$ şi $\lambda \in \mathbb{R}$, se defineşte şi se notează

$$A + B = \{a + b \mid a \in A,\, b \in B\},$$
$$\lambda A = \{\lambda a \mid a \in A\}.$$

În cazul că $\mathcal{F}, \mathcal{G} \subset \mathcal{F}(J) = \{f : J \to \mathbb{R}\}$, adică $\mathcal{F}$ şi $\mathcal{G}$ sunt părţi ale mulţimii funcţiilor definite pe J, cu valori reale, se defineşte şi se notează

$$\mathcal{F} + \mathcal{G} = \{f + g \mid f \in \mathcal{F},\, g \in \mathcal{G}\},$$
$$\lambda \mathcal{F} = \{\lambda f \mid f \in \mathcal{F}\},$$
$$\mathcal{C} = \{f : J \to \mathbb{R} \mid f \text{ funcţie constantă}\}.$$

VII. 8. Observaţii. Cu notaţiile precedente, avem

a) $\lambda\mathcal{C} = \mathcal{C}$, dacă $\lambda \neq 0$ (ceea ce înseamnă că produsul dintre orice funcţie constantă şi un număr $\lambda \neq 0$ este o funcţie constantă şi reciproc, orice funcţie constantă este egală cu produsul dintre un număr $\lambda \neq 0$ şi o altă funcţie constantă);

b) $\mathcal{C} + \mathcal{C} = \mathcal{C}$ (ceea ce înseamnă că suma a două funcţii constante este, de asemenea, o funcţie constantă şi reciproc, orice funcţie constantă este egală cu suma a două funcţii constante);

c) Dacă $f : J \to \mathbb{R}$ este o funcţie care admite primitive şi dacă F_0 este o primitivă a sa, atunci

$$\int f(x)\mathrm{d}x = \{F_0\} + \mathcal{C}$$

sau, cu scrierea $\{F_0\} = F_0$, are loc egalitatea de mulţimi de funcţii

$$\int f(x)\mathrm{d}x = F_0 + \mathcal{C}.$$[1]

VII. 9. Propoziţie. Fie $f : J \to \mathbb{R}$, o funcţie care admite primitive. Atunci are loc egalitatea

$$\int f(x)\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x + \mathcal{C}.$$[2]

VII.10. Propoziţie. Fie $f, g : J \to \mathbb{R}$ două funcţii care admit primitive şi $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$. Atunci funcţiile $f + g$ şi λf admit de asemenea primitive şi au loc egalităţile

$$\int (f(x) + g(x))\,\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x + \int g(x)\mathrm{d}x;$$

$$\int \lambda f(x)\mathrm{d}x = \lambda \int f(x)\mathrm{d}x \qquad (\lambda \neq 0).$$

---

[1] Punctul c) reprezintă scrierea sub formă de egalitate de mulţimi a observaţiei VII.2 şi a concluziei din propoziţia VII. 3.

[2] Reamintim că relaţia este o egalitate de mulţimi; ea poate fi asemănată cu egalitatea $\mathbb{R} = \mathbb{R} + \{c\}$, unde c este un număr real fixat.

VII. 11. Tabelul integralelor nedefinite uzuale [1]

	Funcţia	Mulţimea primitivelor
1.	$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=0$	$\int 0\mathrm{d}x = C$
2.	$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=1$	$\int \mathrm{d}x = x + C$
3.	$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^n,\ n\in\mathbb{N}$	$\int x^n\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
4.	$f: J\to\mathbb{R},\ J\subset(0,\infty),\ f(x)=x^{\alpha}$, $\alpha\in\mathbb{R},\ \alpha\neq -1$	$\int x^{\alpha}\mathrm{d}x = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$
4′	(cazuri particulare la 4, frecvent întâlnite) a) $\alpha=-2,\ f(x)=\frac{1}{x^2}$ b) $\alpha=-\frac{1}{2},\ f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$	 $\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2} = -\frac{1}{x} + C$ $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$
5.	$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\mathrm{e}^x$	$\int \mathrm{e}^x\mathrm{d}x = e^x + C$
5′.	$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=a^x, 0<a\neq 1$	$\int a^x\mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + C$
6.	$f: J\to\mathbb{R},\ J\subset(-\infty,0)\cup(0,\infty);$ $f(x)=\frac{1}{x}$	$\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln\lvert x\rvert + C$
7.	$f: J\to\mathbb{R},\ J\in\mathbb{R}\setminus\{-a,a\}$, $f(x)=\frac{1}{x^2-a^2}$	$\int\frac{1}{x^2-a^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{x-a}{x+a}\right\rvert + C$
8.	$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{1}{x^2+a^2}$	$\int\frac{1}{x^2+a^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\mathrm{arctg}\frac{x}{a} + C$
9.	$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\sin x$	$\int\sin x\mathrm{d}x = -\cos x + C$
10.	$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\cos x$	$\int\cos x\mathrm{d}x = \sin x + C$

[1] În tot acest tabel, J reprezintă un interval, iar a este un număr real strict pozitiv.

11.	$f: J \to \mathbb{R}$, $J \subset \mathbb{R} \setminus \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$ $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$	$\int \frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x = \mathrm{tg}x + C$
12.	$f: J \to \mathbb{R}$, $J \subset \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ $f(x) = \frac{1}{\sin^2 x}$	$\int \frac{1}{\sin^2 x}\mathrm{d}x = -\mathrm{ctg}x + C$
13.	$f: J \to \mathbb{R}$, $J \subset \mathbb{R} \setminus \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$ $f(x) = \mathrm{tg}x$	$\int \mathrm{tg}x\mathrm{d}x = -\ln\lvert\cos x\rvert + C$
14.	$f: J \to \mathbb{R}$, $J \subset \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ $f(x) = \mathrm{ctg}x$	$\int \mathrm{ctg}x\mathrm{d}x = \ln\lvert\sin x\rvert + C$
15.	$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$	$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}\mathrm{d}x =$ $= \ln\left(x + \sqrt{x^2+a^2}\right) + C$
16.	$f: J \to \mathbb{R}$, $J \subset (-\infty, -a) \cup (a, \infty)$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}$	$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\mathrm{d}x =$ $= \ln\left\lvert x + \sqrt{x^2-a^2}\right\rvert + C$
17.	$f: J \to \mathbb{R}, J \subset (-a, a)$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$	$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x = \arcsin\frac{x}{a} + C$

VII.12. Teoremă (formula de integrare prin părţi). Fie $f, g : J \to \mathbb{R}$ două funcţii derivabile, cu derivatele continue. Atunci funcţiile fg' şi $f'g$ admit primitive şi

$$\int f(x)g'(x)\mathrm{d}x = fg - \int f'(x)g(x)\mathrm{d}x.^{1)}$$

VII.13. Teoremă (prima formulă de schimbare de variabilă). Fie I şi J două intervale din $\mathbb{R}$ şi fie două funcţii

$$I \xrightarrow{\varphi} J \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$

1) În calculele concrete se pune în evidenţă variabila x, aşa încât formula se foloseşte sub forma $\int f(x)g'(x)\mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\mathrm{d}x$.

cu proprietăţile:

a) φ este derivabilă pe I;

b) f admite primitive (fie F o primitivă a sa).

Atunci funcţia $(f \circ \varphi)\varphi'$ admite primitive, iar funcţia $F \circ \varphi$ este o primitivă a sa, adică:

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\mathrm{d}x = F \circ \varphi + C.^{1)}$$

VII.14. Teoremă (a doua formulă de schimbare de variabilă). Fie I şi J două intervale din $\mathbb{R}$ şi fie două funcţii

$$I \xrightarrow{\varphi} J \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$

cu proprietăţile:

a) φ este bijectivă, derivabilă, cu derivata nenulă pe I;

b) funcţia $h = (f \circ \varphi)\varphi'$ admite primitive (fie H o primitivă a sa).

Atunci

1) funcţia f admite primitive,

2) Funcţia $H \circ \varphi^{-1}$ este o primitivă a funcţiei f, adică:

$$\int f(x)\mathrm{d}x = H \circ \varphi^{-1} + C.^{2)}$$

* * *

Elementele de teorie referitoare la integrarea funcţiilor raţionale, precum şi schimbările de variabilă clasice, care reduc calculul unor primitive la cel al primitivelor unor funcţii raţionale, nu sunt prezentate aici, ci la secţiunile respective.

1. CALCULUL CÂTORVA PRIMITIVE LA CARE SE APLICĂ DOAR FORMULELE FUNDAMENTALE ŞI PROPRIETATEA DE LINIARITATE

1. Să se verifice formulele din tabloul primitivelor prin derivare.

2. Aplicând formula $\displaystyle\int x^\alpha \mathrm{d}x = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$ $(\alpha \neq -1)$, să se deducă egalităţile:

a) $\displaystyle\int \frac{1}{x^n}\mathrm{d}x = -\frac{1}{n-1} \cdot \frac{1}{x^{n-1}} + C$, $x \in J \subset (-\infty, 0) \cup (0, \infty)^{3)}$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$;

---

1) Din nou, în calculele concrete, se pune în evidenţă variabila x, adică formula se utilizează sub forma $\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\mathrm{d}x = F(\varphi(x)) + C$.

2) Analog $\int f(x)\mathrm{d}x = H\left(\varphi^{-1}(x)\right) + C$.

3) În tot ceea ce urmează, J desemnează un interval nedegenerat al axei reale.

b) $\int \frac{1}{\sqrt{x}} \mathrm{d}x = 2\sqrt{x} + C,\ x \in (0, \infty);$

c) $\int \sqrt[n]{x}\, \mathrm{d}x = \frac{n}{n+1} \sqrt[n]{x^{n+1}} + C,\ x \in [0, \infty).$

3. Aplicând egalităţile din problema **2**, să se calculeze:[1]

a) $\int \frac{1}{x^2}\, \mathrm{d}x;$ b) $\int \frac{1}{x^3}\, \mathrm{d}x;$ c) $\int \frac{1}{x^8}\, \mathrm{d}x;$

d) $\int \sqrt[3]{x} \mathrm{d}x;$ e) $\int \sqrt[4]{x} \mathrm{d}x;$ f) $\int \sqrt[7]{x} \mathrm{d}x.$

4. a) Scriind că $\mathrm{e}^{-x} = \left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^x$ şi observând că $\ln\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right) = -1$, să se deducă egalitatea

$$\int \mathrm{e}^{-x} \mathrm{d}x = -\mathrm{e}^{-x} + C;$$

b) Se notează $\mathrm{ch}\, x = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}$ şi $\mathrm{sh}\, x = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}$. Să se deducă egalităţile:

$$\int \mathrm{ch} x\, \mathrm{d}x = \mathrm{sh}\, x + C; \qquad \int \mathrm{sh} x\, \mathrm{d}x = \mathrm{ch}\, x + C.$$[2]

5. Să se calculeze:

a) $\int \left(x^2 + 6x + 7\right) \mathrm{d}x,\ x \in \mathbb{R};$

b) $\int \left(x^{\frac{2}{5}} + x^{-\frac{7}{3}} + x^{\frac{1}{2}} + x^{-1}\right) \mathrm{d}x,\ x \in (0, \infty);$

c) $\int \left(1 + x + x^2 + x^3\right) \mathrm{d}x,\ x \in \mathbb{R};$

d) $\int \frac{1}{x}\, \mathrm{d}x,\ x \in (0, \infty);$ e) $\int \left(\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) \mathrm{d}x,\ x \in (-1, 1);$

f) $\int \left(3 \sin x + 4 \cos x + \frac{1}{\cos^2 x}\right) \mathrm{d}x,\ x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right);$

g) $\int \frac{1 - \cos^3 x}{\cos^2 x}\, \mathrm{d}x,\ x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right);$ h) $\int 2^x 3^x 5^x\, \mathrm{d}x,\ x \in \mathbb{R}.$

6. Să se decidă dacă sunt corecte egalităţile următoare, dând şi justificarea:

a) $\int \frac{1}{1+x^2}\, \mathrm{d}x = \mathrm{arctg} x + C = -\mathrm{arcctg}\, x + K,\ x \in \mathbb{R};$

---

[1] În enunţul unei probleme de acest fel, cel mai riguros mod de prezentare este acela ca să se precizeze dinainte intervalul în care este considerată variabila x, interval care poate fi o submulţime a domeniului maxim de definiţie al funcţiei care se integrează. Dacă acest lucru nu este făcut, el revine în atribuţiile rezolvitorului.

[2] Funcţiile reale de variabilă reală x, $x \mapsto \mathrm{ch}\, x$ şi $x \mapsto \mathrm{sh}\, x$ se numesc **cosinus hiperbolic**, respectiv **sinus hiperbolic**.

b) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \arcsin x + C = -\arccos x + K,\ x \in (-1,1).$

7. Să se determine:

a) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{4+x^2},\ x \in \mathbb{R};\quad \int \frac{\mathrm{d}x}{5+x^2},\ x \in \mathbb{R};$

b) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{1+4x^2},\ x \in \mathbb{R};\quad \int \frac{\mathrm{d}x}{1+5x^2},\ x \in \mathbb{R};$

c) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{9+4x^2},\ x \in \mathbb{R};\quad \int \frac{\mathrm{d}x}{7+3x^2},\ x \in \mathbb{R};$

d) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4-x^2}},\ x \in (-2,2);\quad \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{7-x^2}},\ x \in (-\sqrt{7},\sqrt{7});$

e) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-4x^2}},\ x \in \left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right);\quad \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-5x^2}},\ x \in \left(-\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{5}}\right);$

f) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{9-4x^2}},\ x \in \left(-\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right);\quad \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{7-5x^2}},\ x \in \left(-\sqrt{\frac{7}{5}},\sqrt{\frac{7}{5}}\right).$

8. Să se determine următoarele primitive (în care J este un interval):

a) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-4},\ x \in J \subset (-\infty,-2) \cup (-2,2) \cup (2,\infty);$

$\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-5},\ x \in J \subset (-\infty,-\sqrt{5}) \cup (-\sqrt{5},\sqrt{5}) \cup (\sqrt{5},\infty);$

a′) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{4-x^2},\ x \in (-2,2);\quad \int \frac{\mathrm{d}x}{5-x^2},\ x \in (-\sqrt{5},\sqrt{5});$

b) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{4x^2-1},\ x \in J \subset \left(-\infty,-\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2},\infty\right);$

$\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{5x^2-1},\ x \in J \subset \left(-\infty,-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{5}},\infty\right);$

b′) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{1-4x^2},\ x \in \left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right);\quad \int \frac{\mathrm{d}x}{1-5x^2},\ x \in \left(-\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{5}}\right);$

c) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{4x^2-9},\ x \in J \subset \left(-\infty,-\frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2},\infty\right);$

$\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{5x^2-7},\ x \in J \subset \left(-\infty,-\sqrt{\frac{7}{5}}\right) \cup \left(\sqrt{\frac{7}{5}},\infty\right);$

c′) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{9-4x^2},\ x \in \left(-\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right);\quad \int \frac{\mathrm{d}x}{7-5x^2},\ x \in \left(-\sqrt{\frac{7}{5}},\sqrt{\frac{7}{5}}\right);$

d) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-4}},\ x \in (-\infty,-2) \cup (2,\infty);$

$\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-5}},\ x \in J \subset (-\infty,-\sqrt{5}) \cup (\sqrt{5},\infty);$

e) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4x^2-1}},\ x \in J \subset \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, \infty\right);$

$\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{5x^2-1}},\ x \in J \subset \left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \infty\right);$

f) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+4}},\ x \in \mathbb{R};$ $\qquad \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+5}},\ x \in \mathbb{R};$

g) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4x^2+1}},\ x \in \mathbb{R};$ $\qquad \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{5x^2+1}},\ x \in \mathbb{R}.$

2. CALCULUL CÂTORVA PRIMITIVE PE BAZA INTEGRĂRII PRIN PĂRŢI

9. Să se calculeze următoarele primitive, efectuând alegerea indicată în dreptul fiecăreia:

a) $\displaystyle I = \int x\mathrm{e}^x \mathrm{d}x,\ x \in \mathbb{R}$ $\quad \dots\ f(x) = x \qquad g'(x) = \mathrm{e}^x;$

b) $\displaystyle I = \int x2^x \mathrm{d}x,\ x \in \mathbb{R}$ $\quad \dots\ f(x) = x \qquad g'(x) = 2^x;$

c) $\displaystyle I = \int x \ln x\, \mathrm{d}x,\ x \in (0, \infty)$ $\quad \dots\ f(x) = \ln x \qquad g'(x) = x;$

d) $\displaystyle I = \int x^n \ln x \mathrm{d}x,\ x \in (0, \infty)$ $\quad \dots\ f(x) = \ln x \qquad g'(x) = x^n;$

e) $\displaystyle I = \int x \cos x \mathrm{d}x,\ x \in \mathbb{R}$ $\quad \dots\ f(x) = x \qquad g'(x) = \cos x;$

f) $\displaystyle I = \int x \sin x \mathrm{d}x,\ x \in \mathbb{R}$ $\quad \dots\ f(x) = x \qquad g'(x) = \sin x;$

g) $\displaystyle I = \int \frac{x \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)}{\sqrt{1+x^2}} \mathrm{d}x,\ x \in \mathbb{R} \dots f(x) = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$

$\displaystyle g'(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}},\ x \in \mathbb{R};$

h) $\displaystyle I = \int x \cosh x\, \mathrm{d}x,\ x \in \mathbb{R}$ $\quad \dots\ f(x) = x \qquad g'(x) = \cosh x;$

i) $\displaystyle I = \int x \sinh x\, \mathrm{d}x,\ x \in \mathbb{R}$ $\quad \dots\ f(x) = x \qquad g'(x) = \sinh x;$

j) $\displaystyle I = \int \frac{x \arcsin x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}x,\ \dots f(x) = \arcsin x \qquad g'(x) = \frac{x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}.$

Observaţii. 1) La calculul primitivelor pe baza integrării prin părţi, se recomandă aşezarea funcţiilor în următoarea ordine (exemplificarea este dată pentru punctul a)):

$1^\circ\ f(x) = x;$ $\qquad 3^\circ\ f'(x) = 1;$
$2^\circ\ g'(x) = \mathrm{e}^x;$ $\qquad 4^\circ\ g(x) = \mathrm{e}^x.$

(Se face alegerea formată din 1° şi 2°, în aşa fel încât produsul $f(x)g'(x)$ să coincidă exact cu funcţia de sub integrală, iar apoi se calculează 3° şi 4°.) Aplicând formula de integrare prin părţi, rezultă

$$I = \int x\mathrm{e}^x \mathrm{d}x = x\mathrm{e}^x - \int \mathrm{e}^x \mathrm{d}x = x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x + C.$$

Mai există o modalitate „rapidă“ de integrare prin părţi, care constă în a pune în evidenţă ***în interiorul integralei*** una dintre funcţiile care alcătuiesc produsul, ca derivată. Astfel, tot pentru punctul a), se obţine:

$$I = \int x\mathrm{e}^x \mathrm{d}x = \int x\left(\mathrm{e}^x\right)' \mathrm{d}x = x\mathrm{e}^x - \int x'\mathrm{e}^x \mathrm{d}x = x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x + C.$$

2) Metoda de integrare prin părţi serveşte în general la calculul primitivelor dintr-un produs al unor funcţii „diferite“, „îndepărtate între ele“.

3) Dacă o primă alegere a funcţiilor f şi g nu duce la calcularea unei primitive mai simple, nu trebuie considerat numaidecât că primitiva nu poate fi calculată pe baza metodei de integrare prin părţi; o eventuală altă alegere a funcţiilor poate remedia situaţia.

4) În general, la calculul unei primitive de forma $F(x) = \int P(x)\varphi(x)\mathrm{d}x$, unde P este o funcţie polinomială cu coeficienţi reali, iar φ este o funcţie transcendentă elementară, se recomandă următoarea alegere:

- în rolul funcţiei f, se alege funcţia transcendentă φ, dacă aceasta este o funcţie transcendentă inversă;
- în rolul funcţiei g', se alege funcţia transcendentă φ, dacă aceasta este o funcţie transcendentă directă.

Menţionăm următoarele funcţii transcendente elementare directe, împreună cu inversele corespunzătoare:

Directe	**Inverse**
e^x	$\ln x$
a^x, $0 < a \neq 1$	$\log_a x$
$\sin x$	$\arcsin x$
$\cos x$	$\arccos x$
$\mathrm{tg}x$	$\mathrm{arctg}x$
$\mathrm{ctg}x$	$\mathrm{arcctg}x$

La acestea se mai pot adăuga:

$\mathrm{sh}x$	$\mathrm{argsh}\ x$
$\mathrm{ch}x$	$\mathrm{argch}\ x$[1)]
$\mathrm{th}\ x$	$\mathrm{argth}\ x$.[2)]

[1)]Funcţia $\mathrm{ch} : \mathbb{R} \to [1, \infty)$ nu este bijectivă. Se pot inversa restricţiile sale maximale, la intervalele $(-\infty, 0)$, respectiv $(0, \infty)$. Din egalitatea $y = \mathrm{ch}x = \dfrac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}$ se obţine $x = \ln\left(y + \sqrt{y^2 - 1}\right)$ în cazul $x > 0$, respectiv $x = \ln\left(y - \sqrt{y^2 - 1}\right)$ în cazul $x < 0$. Printr-un abuz de notaţie devenit tradiţional, se notează ambele funcţii inverse, corespunzătoare celor două restricţii, cu argch y.

[2)]Funcţiile sh şi th sunt bijective şi se obţine $\mathrm{argsh}\ y = \ln\left(y + \sqrt{y^2 + 1}\right)$, respectiv $\mathrm{argth}\ y = \dfrac{1}{2} \ln \dfrac{1 - y}{1 + y}$.